Théoréme de Kaplansky effectif pour des valuations de rang 1 centrées sur des anneaux locaux réguliers et complets

Jean-Christophe San Saturnino

THÉORÈME DE KAPLANSKY EFFECTIF POUR DES VALUATIONS DE RANG 1 CENTRÉES SUR DES ANNEAUX LOCAUX RÉGULIERS ET COMPLETS.

par Jean-Christophe SAN SATURNINO

Résumé. On montre que tout anneau local régulier complet muni d'une valuation de rang 1 peut être plongé, en tant qu'anneau valué, dans un anneau de séries de Puiseux généralisées.

0. Introduction

On sait, depuis Newton et Puiseux que, pour un corps k de caractéristique 0 et algébriquement clos, alors $k(t)$ peut être plongé dans le corps $\bigcup\limits_{i\geqslant 1} k\left(\left(t^{1/i}\right)\right)$ *des séries de Puiseux* qui est algébriquement clos. De plus, si k est muni de la valuation triviale et $k(t)$ de la valuation t-adique, on peut alors munir le corps des séries de Puiseux d'une valuation de telle sorte que la restriction à $k(t)$ soit la valuation t-adique : c'est un exemple d'*extension maximalement complète* (voir [6] et [8]).
Krull ([6]) montra, à l'aide du Lemme de Zorn, que tout corps muni d'une valuation possède une extension maximale et que tout corps de séries de Puiseux, muni de sa valuation naturelle, est maximale. L'existence et l'unicité de cette extension maximale fut posée par Kaplansky ([4]) qui la démontra en caractéristique nulle ainsi que sa non-unicité en caractéristique positive. De plus, Poonen ([8]) a montré que si le groupe des valeurs de la valuation est divisible et si le corps est algébriquement clos, alors l'extension maximalement complète est algébriquement close.
La question qui vient alors naturellement est : quelle est la forme de cette

Mots-clés : séries de Puiseux, polynômes-clés, valuations.
Classification math. : 13F25, 13F30, 13J05, 13K05.

extension ? En caractéristique positive, on sait qu'elle n'est pas de la forme $\bigcup\limits_{i\geqslant 1} k\left(\left(t^{1/i}\right)\right)$ puisque l'équation d'Artin-Schreier n'y possède aucune solution (voir [1], [2]). Il est alors naturel de considérer des anneaux de séries généralisées où les puissances de t varient sur un ensemble bien ordonné. De tels anneaux sont appelés des *anneaux de Mal'cev-Neumann* introduits en premier par Hahn en 1908 puis étudiés par Krull en 1932 (voir [6]).

En 1942, Kaplansky ([4]) montre que tout corps muni d'une valuation ayant un groupe des valeurs divisible et un corps résiduel algébriquement clos se plonge dans une extension maximalement close. Remarquons que deux cas se présentent : ou bien la restriction à $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{F}_p$ est la valuation triviale (cas équicaractéristique), ou bien la restriction à $\mathbb{Q}$ est la valuation p-adique (cas mixte). Il a également montré que dans le cas équicaractéristique, l'extension maximale est un anneau de Mal'cev-Neumann.
En 1993, Poonen ([8]) décrit explicitement les extensions dans les deux cas. Si (k,ν) est un corps valué de groupe des valeurs Γ divisible et de corps résiduel k_ν algébriquement clos, alors il existe des plongements dans des anneaux de Mal'cev-Neumann maximalement complets :

(1) $k \hookrightarrow k_\nu\left(\left(t^\Gamma\right)\right)$ (cas équicaractéristique) ;

(2) $k \hookrightarrow W(k_\nu)\left(\left(p^\Gamma\right)\right)$, où $W(k_\nu)$ est l'anneau des vecteurs de Witt de k_ν (cas mixte) .

Dans tous les cas les preuves ne construisent pas explicitement le plongement.

Depuis quelques années, la théorie des valuations reprend une place importante dans la résolution des singularités et notamment dans l'uniformisation locale des schémas quasi-excellents ,voir par exemple [9]. Les questions d'avoir un Théorème de Kaplansky et de connaître explicitement le plongement se posent alors naturellement, on connaît l'intérêt d'avoir une paramétrisation de Puiseux pour l'uniformisation locale des courbes sur un corps de caractéristique 0.

Dans cet article on se propose donc de décrire de manière explicite un plongement d'un anneau local régulier et complet muni d'une valuation de rang 1 à l'aide des polynômes-clés définis dans [3] et [7], résultat qui généralise ceux de Kaplansky et Poonen.

Dans la première et la deuxième partie, nous définissons les anneaux de Mal'cev-Neumann en suivant [5] et [8] et nous en construisons deux explicitement.

Dans la troisième partie, nous proposons quelques rappels sur les polynômes-clés définis pour des valuations de rang 1. Cet outil est essentiel car il permet de connaître la valuation seulement par la connaissance de la collection bien ordonnée des polynômes-clés, collection qui existe d'aprés [3] et [9].
Dans la quatrième partie, nous énonçons et démontrons de manière effective le Théorème de plongement de Kaplansky pour des anneaux locaux, réguliers, complets munis d'une valuation de rang 1.
Dans la dernière partie, nous démontrons des résultats de dépendance intégrale valables en caractéristique mixte qui sont à rapprocher de ceux de Spivakovsky ([9]) dans le cadre de l'uniformisation locale des schémas quasi-excellents.

Je tiens à remercier M. Spivakovsky pour son aide précieuse, ses conseils avisés et la liberté qu'il me permet d'avoir dans mes recherches.

Notations. Soit $(R, \mathfrak{m}, k)$ un anneau local, régulier, complet et de dimension $n+1$. On note :

$$p = \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & \text{si} & car(k) = 0 \\ car(k) & \text{si} & car(k) > 0 \end{array} \right.$$

Si R est de caractéristique mixte, on suppose de plus que $p \notin \mathfrak{m}^2$. Par le théorème de Cohen, on peut supposer que :

$$R = \left\{ \begin{array}{ccc} k\,[[u_1, ..., u_{n+1}]] & \text{si} & car(R) = car(k) \\ W\,[[u_1, ..., u_n]] & \text{si} & car(R) \neq car(k) \end{array} \right.$$

où W est un anneau complet de valuation discrète de paramètre régulier p et de corps résiduel k. On note :

$$K_0 = \left\{ \begin{array}{ccc} k & \text{si} & car(R) = car(k) \\ Frac(W) & \text{si} & car(R) \neq car(k) \end{array} \right.$$

$$K_j = \left\{ \begin{array}{ccc} k\,((u_1, ..., u_{j+1})) & \text{si} & car(R) = car(k) \\ W\,((u_1, ..., u_j)) & \text{si} & car(R) \neq car(k) \end{array} \right.$$

(on notera parfois $K = K_n$).
Soit ν une valuation de K, centrée en R, de groupe des valeurs Γ, telle que $\nu_{|K_{n-1}}$ soit de rang 1. On écrit (R_ν, m_ν, k_ν) son anneau de valuation et on suppose que k_ν est algébrique sur k. On note, Γ_1 le plus petit sous-groupe isolé non-nul de Γ et :

$$\Gamma_{\mathbb{Q}} = \Gamma \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q};$$

$$\Gamma' = \bigcup_{i \geqslant 1} \frac{1}{p^i}\Gamma.$$

Posons r le plus petit j tel que les $\nu(u_{i_1}),...,\nu(u_{i_j})$ soient $\mathbb{Z}$-linéairements indépendants si R est équicaractéristique, ou bien le plus petit j tel que les $\nu(p),\nu(u_{i_1}),...,\nu(u_{i_j})$ soient $\mathbb{Z}$-linéairements indépendants si R est de caractéristique mixte.
On supposera alors, quitte à renuméroter les variables, que :
$\nu(u_1),...,\nu(u_r)$ sont $\mathbb{Z}$-linéairements indépendantes et $\nu(u_{r+1}),...,\nu(u_{n+1})$ sont $\mathbb{Q}$-combinaisons linéaires de $\nu(u_1),...,\nu(u_r)$ si R est équicaractéristique ;
$\nu(p),\nu(u_1),...,\nu(u_r)$ sont $\mathbb{Z}$-linéairements indépendantes et $\nu(u_{r+1}),...,\nu(u_n)$ sont $\mathbb{Q}$-combinaisons linéaires de $\nu(p),\nu(u_1),...,\nu(u_r)$ si R est de caractéristique mixte.
On note ν_0 la valuation monômiale de R associée à $\mathfrak{m}$ (voir [9], Définition 3.10), c'est-à-dire, si $f=\sum\limits_{\alpha} a_\alpha u^\alpha \in R$ où α est un multi-indice, $a_\alpha \in k$ (resp. $a_\alpha \in W$) $u^\alpha = u_1^{\alpha_1}...u_{n+1}^{\alpha_{n+1}}$ (resp. $u^\alpha = u_1^{\alpha_1}...u_n^{\alpha_n}$) et $\mathfrak{m}=(u_1,...,u_{n+1})$ (resp. $\mathfrak{m}=(p,u_1,...,u_n)$), alors :

$$\nu_0(f)=\min\left\{\sum_{i=1}^{n+1}\alpha_i\nu(u_i)\mid a_\alpha\neq 0\right\}$$

$$\left(\text{resp. } \nu_0(f)=\min\left\{\alpha_0\nu(p)+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\nu(u_i)\mid a_\alpha\neq 0\right\}\right).$$

Enfin, si A est un anneau, $P,Q\in A[X]$ tels que $P=\sum\limits_{i=0}^{n} a_iQ^i$, $a_i\in A[X]$ tels que le degré de a_i est strictement inférieur à celui de Q, on note :

$$d_Q^\circ(P)=n.$$

Si $Q=X$, on notera plus simplement $d^\circ(P)$ au lieu de $d_X^\circ(P)$.
Supposons de plus que A est intègre, considérons w une valuation de A et $\gamma\in w(A\setminus\{0\})$, on note :

$$P'_\gamma=\{f\in A\mid w(f)\geqslant\gamma\}\cup\{0\};$$

$$P'_{\gamma,+}=\{f\in A\mid w(f)>\gamma\}\cup\{0\};$$

$$gr_w(A)=\bigoplus_{\gamma\in w(A\setminus\{0\})}P'_\gamma/P'_{\gamma,+};$$

et $in_w(f)$ l'image de $f\in A$ dans $gr_w(A)$.

1. Anneaux des séries généralisées

On va définir des anneaux de séries généralisées (également appelés anneaux de Mal'cev-Neumann) en suivant les constructions données par [5] et [8].

Définition 1.1. — *Soient A un anneau intègre et G un groupe abélien ordonné. On appelle* ***anneau des séries formelles généralisées****, noté $A\left[\left[t^G\right]\right]$, l'anneau où les éléments sont de la forme $\sum_{\gamma\,\in\, G_+} a_\gamma t^\gamma$, avec les $a_\gamma \in A$ tels que l'ensemble $\{\gamma \mid a_\gamma \neq 0\}$ soit bien ordonné.*
Si A est un anneau intègre local de caractéristique mixte dont le corps résiduel est de caractéristique p et d'idéal maximal engendré par p, on appelle ***anneau des p-séries formelles généralisées****, noté $A\left[\left[p^G\right]\right]$, l'anneau $A\left[\left[t^G\right]\right]/N$ où N est l'idéal de $A\left[\left[t^G\right]\right]$ formé par les $f = \sum_{\gamma\,\in\, G_+} a_\gamma t^\gamma$ tels que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_{n+\gamma} p^n = 0$, pour tout $\gamma \in G$.*

Remarque 1.2. — L'anneau $A\left[\left[t^G\right]\right]$ (resp. l'anneau $A\left[\left[p^G\right]\right]$) est muni de la *valuation t-adique* (resp. *valuation p-adique*) v, à valeurs dans G, définie par :

$$v(f) = inf\{\gamma \mid a_\gamma \neq 0\}\,,\ \forall\, f = \sum_{\gamma\,\in\, G_+} a_\gamma t^\gamma \ \in\ A\left[\left[t^G\right]\right]$$

$$(resp.\ \forall\, f = \sum_{\gamma\,\in\, G_+} a_\gamma p^\gamma \ \in\ A\left[\left[p^G\right]\right]).$$

Définition 1.3. — *Un anneau de séries formelles généralisées (resp. de p-séries formelles généralisées) muni de sa valuation t-adique (resp. p-adique) sera appelé un* ***anneau de Mal'cev-Neumann****.*
Sa valuation t-adique (resp. p-adique) associée sera appelée ***valuation de Mal'cev-Neumann****.*

Définition 1.4. — *Soient $f = \sum_{\gamma\,\in\, G_+} a_\gamma t^\gamma \in A\left[\left[t^G\right]\right]$ (resp. $f = \sum_{\gamma\,\in\, G_+} a_\gamma p^\gamma \in A\left[\left[p^G\right]\right]$) et $\beta \in G_+$, on appelle* ***troncature ouverte de f en β*** *la série généralisée $f(\beta) = \sum_{\gamma<\beta} a_\gamma t^\gamma$ (resp. $f(\beta) = \sum_{\gamma<\beta} a_\gamma p^\gamma$) et* ***troncature fermée de f en β*** *la série généralisée $f[\beta] = \sum_{\gamma\leqslant\beta} a_\gamma t^\gamma$ (resp. $f[\beta] = \sum_{\gamma\leqslant\beta} a_\gamma p^\gamma$). Pour $\beta, \beta' \in G_+$, $\beta < \beta'$, on note $f[\beta, \beta'[= f(\beta') - f(\beta)$.*

2. Construction de l'anneau de Mal'cev-Neumann

Soient $(R, \mathfrak{m}, k)$ un anneau local complet régulier de dimension $n+1$ et ν une valuation de $K = Frac(R)$, centrée en R, de groupe des valeurs Γ. On va construire un anneau de Mal'cev-Neumann A_R dans lequel plonger R.

Si R est équicaractéristique, on prend $A_R = \overline{k_\nu}\left[\left[t^{\Gamma'}\right]\right]$, où $\overline{k_\nu}$ est une clôture algébrique de k_ν.

Si R est de caractéristique mixte, on va construire, par récurrence transfinie, un anneau local $(\overline{W}, p\overline{W}, \overline{k_\nu})$ qui soit une extension de W. Dans ce cas, on pose $A_R = \overline{W}\left[\left[p^{\Gamma'}\right]\right]$.

Soit $\overline{k_\nu}$ une clôture algébrique de k_ν, on peut la voir comme limite inductive d'extensions algébriques simples de k puisque k_ν est algébrique sur k. Plus précisément, $\overline{k_\nu} = k(\{\alpha_i\}_{i\in I})$ où I est un ensemble bien ordonné et les α_i des éléments algébriques sur k, $i \in I$. Le système inductif est alors donné par les inclusions provenant de l'ordre total de I. Supposons que $i \in I$ possède un prédécesseur immédiat, on est alors emmené à considérer une extension de la forme :

$$\kappa \hookrightarrow \kappa(\alpha)$$

où, par hypothèse de récurrence, α est algébrique sur κ et κ est le corps résiduel d'un anneau local (A, m_A). Soit Q le polynôme minimal unitaire de α et P un relevé unitaire dans A. On pose alors $A' = A[\alpha]/(P(\alpha))$ et on a un morphisme d'inclusion :

$$A \hookrightarrow A'$$

Lemme 2.1. — *A' est un anneau local d'idéal maximal $m_A A'$ et de corps résiduel $\kappa(\alpha)$.*

Preuve : L'idéal $m_A A'$ est maximal dans A' car $A'/m_A A' \simeq \kappa(\alpha)$. Soit M un autre idéal maximal de A', alors $M \cap A = m_A$. Pour montrer ceci il suffit de remarquer que $A/(M\cap A)$ est un corps. Soit $a \in A/(M \cap A)$, $a \neq 0$, l'extension entière $A \hookrightarrow A'$ induit une extension d'anneaux intègres entière $A/(M\cap A) \hookrightarrow A'/M$, ainsi $a \in A'/M$ qui est un corps et donc $a^{-1} \in A'/M$. Il existe alors des éléments $a_0, ..., a_{m-1} \in A/(M \cap A)$ et $m \geqslant 1$ tels que $a^{-m} + a_{m-1}a^{-m+1} + ... + a_0 = 0$ et donc $a^{-1} = -(a_{m-1} + ... + a_0 a^{m-1}) \in A/(M \cap A)$. On remarque enfin que $m_A A' = (M \cap A)A' \subset M$ et donc A' est un anneau local.

□

Si i est un ordinal limite, notons $\kappa_l = k(\{\alpha_j\}_{j\leqslant l})$, pour tout $l \leqslant i$. On suppose, par hypothèse de récurrence, que l'on a construit les anneaux locaux A_l dont les corps résiduels respectifs sont κ_l pour tout $l < i$. On pose alors $A_i = \bigcup\limits_{l<i} A_l$, c'est un anneau local de corps résiduel κ_i. On a donc créé un système inductif d'anneaux locaux, on note $\overline{W}$ la limite inductive, c'est un anneau local d'idéal maximal $p\overline{W}$, de corps résiduel $\overline{k_\nu}$ et on a $W \hookrightarrow \overline{W}$.

Remarque 2.2. — On a un résultat similaire si k_ν est une extension transcendante de k. En effet, si $deg.tr(k_\nu|k) = l$ alors il existe $t_1, ..., t_l$ transcendants tels que $k_\nu = k(t_1, ..., t_l)$. On pose $W' = W[t_1, ..., t_l]$ et on considère l'anneau local $\overline{W'_{pW'}}$, son corps résiduel est $\overline{k_\nu}$ et, $W \hookrightarrow \overline{W'_{pW'}}$.

Remarque 2.3. — Remarquons que W est intégralement clos dans K_0, de plus on a :

$$W \subsetneqq \overline{W}\left[p^{\mathbb{Q}}\right] \hookrightarrow \overline{W}\left[\left[p^{\Gamma_{\mathbb{Q}}}\right]\right].$$

Ce dernier morphisme est induit par :

$$\begin{aligned} \mathbb{Q} &\hookrightarrow \Gamma_{\mathbb{Q}} \\ 1 &\mapsto \nu(p) \end{aligned}$$

On peut résumer cette section par la proposition suivante :

PROPOSITION 2.4. — *Les anneaux* $\overline{k_\nu}\left[\left[t^{\Gamma'}\right]\right]$ *et* $\overline{W}\left[\left[p^{\Gamma'}\right]\right]$ *sont des anneaux de Mal'cev-Neumann au sens de la Définition 1.3.*

3. Rappels sur les polynômes-clés

On va faire quelques rappels sur les polynômes-clés introduits dans [3] et [9] pour des valuations de rang 1. Pour une présentation plus axiomatique des polynômes-clés, on pourra regarder la présentation faite par M. Vaquié ([10], [11], [12], [13], [14]). Un lien entre les deux constructions des polynômes-clés est faite dans les travaux de W. Mahboub ([7]).

Soit $K \hookrightarrow K(x)$ une extension de corps simple et transcendante. Soit μ' une valuation de $K(x)$, notons $\mu := \mu'_{|K}$. On note G le groupe des valeurs de μ' et G_1 celui de μ. On suppose de plus que μ est de rang 1 et que $\mu'(x) > 0$. Enfin, rappelons que pour $\beta \in G$, on note :

$$P'_\beta = \{f \in K(x) \mid \mu'(f) \geqslant \beta\} \cup \{0\};$$

$$P'_{\beta,+} = \{f \in K(x) \mid \mu'(f) > \beta\} \cup \{0\};$$

$$gr_{\mu'}(K(x)) = \bigoplus_{\beta \in G} P'_\beta / P'_{\beta,+};$$

et $in_{\mu'}(f)$ l'image de $f \in K(x)$ dans $gr_{\mu'}(K(x))$.

Définition 3.1. — *Un* ***ensemble complet de polynômes-clés*** *pour* μ' *est une collection bien ordonnée :*

$$\boldsymbol{Q} = \{Q_i\}_{i\in\Lambda} \subset K[x];$$

telle que, pour tout $\beta \in G$*, le groupe additif* $P'_\beta \cap K[x]$ *soit engendré par des produits de la forme* $a \prod\limits_{j=1}^{s} Q_{i_j}^{\gamma_j}$, $a \in K$*, tels que* $\sum\limits_{j=1}^{s} \gamma_j \mu'\left(Q_{i_j}\right) + \mu(a) \geqslant \beta$*.*

Théorème 3.2. — ([3], Théorème 62*) Il existe une collection* $\boldsymbol{Q} = \{Q_i\}_{i\in\Lambda}$ *qui soit un ensemble complet de polynômes-clés.*

Remarque 3.3. — La preuve consiste à construire par récurrence transfinie l'ensemble de polynômes-clés de type d'ordre au plus $\omega \times \omega$.

Définition 3.4. — *Soit* $l \in \Lambda$*, un indice* $i < l$ *est dit* ***l-essentiel*** *s'il existe* $n \in \mathbb{N}$ *tel que* $i + n = l$ *ou* $i + n < l$ *et* $d^{\circ}_{Q_{i+n-1}}(Q_{i+n}) > 1$*. Dans le cas contraire, on dit que* i *est* ***l-inessentiel****.*

Soit $l \in \Lambda$, on note :

$$\alpha_i = d^{\circ}_{Q_{i-1}}(Q_i),\ \forall\, i \leqslant l;$$

$$\boldsymbol{\alpha_{l+1}} = \{\alpha_i\}_{i\leqslant l};$$

$$\mathbf{Q}_{l+1} = \{Q_i\}_{i\leqslant l};$$

On utilise également la notation $\overline{\gamma}_{l+1} = \{\gamma_i\}_{i\leqslant l}$ où les γ_i sont tous nuls sauf pour un nombre fini d'entres eux, $\mathbf{Q}_{l+1}^{\overline{\gamma}_{l+1}} = \prod\limits_{i\leqslant l} Q_i^{\gamma_i}$.

Pour $i < l$, on note :

$$i_+ = \begin{cases} i+1 & \text{si } i \text{ est } l\text{-essentiel} \\ i+\omega & \text{sinon} \end{cases}$$

Définition 3.5. — *Un multi-indice* $\overline{\gamma}_{l+1}$ *est dit* ***standard par rapport à*** $\boldsymbol{\alpha_{l+1}}$ *si* $0 \leqslant \gamma_i < \alpha_{i_+}$*, pour* $i \leqslant l$ *et si* i *est* l*-inessentiel, l'ensemble* $\{j < i_+ \mid j_+ = i_+,\ \gamma_j \neq 0\}$ *est de cardinal au plus* 1*.*
Un ***monôme l-standard en*** $\boldsymbol{Q_{l+1}}$ *est un produit de la forme* $c_{\overline{\gamma}_{l+1}} \boldsymbol{Q}_{l+1}^{\overline{\gamma}_{l+1}}$*, où* $c_{\overline{\gamma}_{l+1}} \in K$ *et* $\overline{\gamma}_{l+1}$ *est standard par rapport à* $\boldsymbol{\alpha_{l+1}}$*.*
Un ***développement l-standard n'impliquant pas*** $\boldsymbol{Q_l}$ *est une somme finie* $\sum\limits_{\beta} S_\beta$ *de monômes* l*-standards n'impliquant pas* Q_l *où* β *appartient à un sous-ensemble fini de* G_+ *et* $S_\beta = \sum\limits_{j} d_{\beta,j}$ *est une somme de monômes standards de valuation* β *vérifiant* $\sum\limits_{j} in_{\mu'}(d_{\beta,j}) \neq 0$*.*

Définition 3.6. — *Soient $f \in K[x]$ et $i \leqslant l$, un* ***développement i-standard de f*** *est une expression de la forme :*

$$f = \sum_{j=0}^{s_i} c_{j,i} Q_i^j,$$

où $c_{j,i}$ est un développement i-standard n'impliquant pas Q_i.

Remarque 3.7. — Un tel développement existe, par division Euclidienne et est unique dans le sens où les $c_{j,i} \in K[x]$ sont uniques.

Définition 3.8. — *Soient $f \in K[x]$, $i \leqslant l$ et $f = \sum\limits_{j=0}^{s_i} c_{j,i} Q_i^j$ un développement i-standard de f. On définit la* ***i-troncature de μ'***, *notée μ'_i, comme étant la pseudo-valuation :*

$$\mu'_i(f) = \min_{0 \leqslant j \leqslant s_i} \{j\mu'(Q_i) + \mu'(c_{j,i})\}.$$

Remarque 3.9. — On peut montrer que c'est en fait une valuation. On a de plus :

$$\forall\, f \in K[x],\ i \in \Lambda,\ \mu'_i(f) \leqslant \mu'(f).$$

On termine en donnant la Proposition 10.1 (Corollaire 50 de [3]) et le Corollaire 10.15 de [9] que nous utiliserons dans les preuves des Propositions 5.1 et 5.8.

Proposition 3.10. — $\forall\, f \in K[x]$, $\forall\, b \in \mathbb{N}$,

$$\mu'_i(f) - \mu'_i\left(\partial_{p^b} f\right) \leqslant \frac{p^b}{p^{b_i}} \left(\mu'(Q_i) - \mu'(\partial_{p^{b_i}} Q_i)\right),$$

où $\partial_{p^b} = \dfrac{1}{p^b!} \dfrac{\partial^{p^b}}{\partial x^{p^b}}$ et b_i le plus petit $c \in \mathbb{N}^*$ qui maximise $\dfrac{\mu'(Q_i) - \mu'(\partial_{p^c} Q_i)}{p^c}$. De plus, il existe $b(i, f) \in \mathbb{N}^*$ calculé en fonction du développement i-standard de f, tel que :

$$\mu'_i(f) - \mu'_i\left(\partial_{p^{b(i,f)}} f\right) = \frac{p^{b(i,f)}}{p^{b_i}} \left(\mu'(Q_i) - \mu'(\partial_{p^{b_i}} Q_i)\right).$$

Proposition 3.11. — *Soit $f = \sum\limits_{j=0}^{s_i} c_{j,i} Q_i^j$ le développement i-standard de $f \in K[x]$, on pose :*

$$S_i = \{j \in \{0, ..., s_i\} \mid j\mu'(Q_i) + \mu'(c_{j,i}) = \mu'_i(f)\}.$$

Soit $j \in S_i$, écrivons j sous la forme $j = p^e u$, où p ne divise pas u si $car(K_\mu) = p > 0$.

Supposons que p^{e+1} *divise* j'*, pour tout* $j' \in S_i$ *tels que* $j' < j$. $(*)$
Alors :

$$\mu_i'(f) = \min_{0 \leqslant j \leqslant s_i} \{\mu_i'(\partial_{jb_i} f) + j(\mu'(Q_i) - \mu'(\partial_{b_i} Q_i))\}$$

et le minimum est atteint pour tout les $j \in S_i$ *vérifiant la condition de divisibilité* $(*)$ *précédente.*

On va utiliser les polynômes-clés dans le cadre des anneaux locaux réguliers, ils interviennent de manière fondamentale dans la démonstration du Théorème 4.1.

Polynômes-clés dans une tour d'extensions de corps. Pour $j \in \{r+1, ..., n\}$, on note $\{Q_{j,i}\}_{i \in \Lambda_j}$ l'ensemble des polynômes-clés de l'extension $K_{j-1} \hookrightarrow K_{j-1}(u_j)$, $\mathbf{Q}_{j,i} = \{Q_{j,i'} | i' \in \Lambda_j, i' < i\}$, $\Gamma^{(j)}$ le groupe des valeurs de $\nu_{|K_j}$ et $\nu_{j,i}$ la i-troncature de ν pour cette extension. Soient $\beta_{j,i} = \nu(Q_{j,i})$ et $b_{j,i}$ le plus petit élément b de $\mathbb{N}$ qui maximise $\dfrac{\beta_{j,i} - \nu(\partial_{j,p^b} Q_{j,i})}{p^b}$, où $\partial_{j,s} = \dfrac{1}{s!} \dfrac{\partial^s}{\partial u_j^s}$, $s \in \mathbb{N}$. Soit $\varepsilon_{j,i} = \dfrac{\beta_{j,i} - \nu(\partial_{j,p^{b_{j,i}}} Q_{j,i})}{p^{b_{j,i}}}$, on a :

Lemme 3.12. — *([9], Lemme 10.4) La suite* $(\varepsilon_{j,i})_i$ *est strictement croissante.*

Preuve : Nous reprennons la preuve du Lemme 10.4 de [9]. Fixons $j \in \{r+1, ..., n\}$ et considérons $i_1, i_2 \in \Lambda_j$ deux ordinaux. Il faut montrer que :

$$\frac{\beta_{j,i_1} - \nu(\partial_{j,p^{b_{j,i_1}}} Q_{j,i_1})}{p^{b_{j,i_1}}} < \frac{\beta_{j,i_2} - \nu(\partial_{j,p^{b_{j,i_2}}} Q_{j,i_2})}{p^{b_{j,i_2}}}.$$

On peut supposer que $i_2 = i_{1+}$ (c'est-à-dire $i_2 = i_1 + 1$ ou $i_2 = i_1 + \omega$), on conclut dans le cas général par récurrence transfinie sur $i_2 - i_1$. Par la Proposition 3.10, il existe $b(i_1, Q_{j,i_2})$ calculé en fonction du développement (j, i_1)-standard de Q_{j,i_2}, tel que :

$$\nu_{j,i_1}(Q_{j,i_2}) - \nu_{j,i_1}\left(\partial_{p^{b(i_1,Q_{j,i_2})}} Q_{j,i_2}\right) = \frac{p^{b(i_1,Q_{j,i_2})}}{p^{b_{i_1}}} \left(\nu(Q_{j,i_1}) - \nu(\partial_{p^{b_{i_1}}} Q_{j,i_1})\right).$$

Vu que $d^\circ \left(\partial_{p^{b(i_1,Q_{j,i_2})}} Q_{j,i_2}\right) < d^\circ (Q_{j,i_2})$, on montre facilement que :

$$\nu_{j,i_1}\left(\partial_{p^{b(i_1,Q_{j,i_2})}} Q_{j,i_2}\right) = \nu\left(\partial_{p^{b(i_1,Q_{j,i_2})}} Q_{j,i_2}\right).$$

Par définition du développement (j, i_1)-standard, on a :

$$\beta_{j,i_2} > \alpha_{j,i_2} \beta_{j,i_1} = \nu_{j,i_1}(Q_{j,i_2}).$$

Ainsi, par définition de ε_{j,i_2} :

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{j,i_1} &= \frac{\nu_{j,i_1}(Q_{j,i_2}) - \nu_{j,i_1}\left(\partial_{p^{b(i_1,Q_{j,i_2})}} Q_{j,i_2}\right)}{p^{b(i_1,Q_{j,i_2})}} \\
&= \frac{\alpha_{j,i_2}\beta_{j,i_1} - \nu\left(\partial_{p^{b(i_1,Q_{j,i_2})}} Q_{j,i_2}\right)}{p^{b(i_1,Q_{j,i_2})}} \\
&< \frac{\beta_{j,i_2} - \nu\left(\partial_{p^{b(i_1,Q_{j,i_2})}} Q_{j,i_2}\right)}{p^{b(i_1,Q_{j,i_2})}} \\
&\leqslant \varepsilon_{j,i_2}.
\end{aligned}$$

On en conclut que la suite $(\varepsilon_{j,i})_i$ est strictement croissante, pour tout $j \in \{r+1, ..., n\}$.

□

4. Le théorème de plongement de Kaplansky

Dans cette section, on suppose que $(R, \mathfrak{m}, k)$ est un anneau local complet régulier de dimension $n+1$. Si R est de caractéristique mixte, on suppose de plus que $p \notin \mathfrak{m}^2$. Notons ν une valuation de $K = Frac(R)$, centrée en R, de groupe des valeurs Γ et telle que $\nu_{|K_{n-1}}$ soit de rang 1.

THÉORÈME 4.1. — *Il existe un anneau de Mal'cev-Neumann A_R et un monomorphisme d'anneaux*

$$\iota : R \hookrightarrow A_R$$

tel que ν soit la restriction à R de la valuation de Mal'cev-Neumann associée à A_R.
Pour $f \in R$, on appelle $\iota(f)$ un ***développement de Puiseux de f par rapport à ν****.*

Remarque 4.2. — $A_R = \begin{cases} \overline{k_\nu}\left[\left[t^{\Gamma'}\right]\right] & \text{si} \quad car(R) = car(k) \\ \overline{W}\left[\left[p^{\Gamma'}\right]\right] & \text{si} \quad car(R) \neq car(k) \end{cases}$

Remarque 4.3. — On sait que :

$$R = \begin{cases} k\left[[u_1, ..., u_{n+1}]\right] & \text{si} \quad car(R) = car(k) \\ W\left[[u_1, ..., u_n]\right] & \text{si} \quad car(R) \neq car(k) \end{cases}$$

la preuve consiste donc à définir, par récurrence transfinie, le développement de Puiseux de $u_1, ..., u_{n+1}$ (resp. $p, u_1, ..., u_n$) à l'aide des polynômes-clés.

Preuve : On va faire la preuve de ce théorème seulement dans le cas où R est de caractéristique mixte. Le cas où R est équicaractéristique se traite de la même manière en remplaçant p par t et en prenant les coefficients directement dans $\overline{k_\nu}$.

Dans ce qui suit on va construire un développement de Puiseux en lien avec les polynômes-clés. Remarquons que définir un développement de Puiseux pour un élément de R revient à définir $n+1$ séries $\iota(p), \iota(u_1), ..., \iota(u_n)$ formellement indépendantes sur W.
On va construire le morphisme ι par récurrence sur $n-r$. Si $n=r$, on pose $\iota(p) = p^{\nu(p)}$ et $\iota(u_j) = p^{\nu(u_j)}$, $j \in \{1, ..., r\}$ (remarquons que, pour que ι soit un morphisme, comme $\nu_{|K_{n-1}}$ est de rang 1, on choisit une fois pour toute un plongement $\Gamma_1 \hookrightarrow \mathbb{R}$ qui envoie $\nu(p)$ sur 1).
Supposons que $n > r$ et que l'on a déjà construit un monomorphisme d'anneaux valués :

$$\iota_{n-1} : R_{n-1} \hookrightarrow \overline{W}\left[\left[p^{\Gamma'}\right]\right]$$

tel que $\nu_{|R_{n-1}}$ soit induite par la valuation p-adique, R_{n-1} désignant l'anneau $W[[u_1, ..., u_{n-1}]]$. Pour $j \in \{1, ..., n-1\}$, on note $u_j(p) = \iota_{n-1}(u_j)$.
Nous allons construire la série généralisée $u_n(p)$ par récurrence transfinie sur un sous-ensemble bien ordonné de Γ'.
Soit $\beta \in \Gamma_+$, on note $i_\beta = \min\{i \in \Lambda_n \mid \beta \leqslant \varepsilon_{n,i}\}$ et par convention, si $\{i \in \Lambda_n \mid \beta \leqslant \varepsilon_{n,i}\} = \emptyset$, on prendra $i_\beta = \Lambda_n$ (c'est-à-dire le plus petit ordinal strictement plus grand que n'importe quel élément de Λ_n).
Supposons donnée une série généralisée $u_n(\beta) = \sum\limits_{\gamma<\beta} a_\gamma p^\gamma \in \overline{W}\left[\left[p^{\Gamma'}\right]\right]$, on considère le morphisme d'anneaux $\iota_\beta : R \to \overline{W}\left[\left[p^{\Gamma'}\right]\right]$ défini par :

$$\begin{aligned} \iota_\beta(p) &= p^{\nu(p)}; \\ \iota_\beta(u_j) &= u_j(p), \ \forall\, j \in \{1, ..., n-1\}; \\ \iota_\beta(u_n) &= u_n(\beta). \end{aligned}$$

Définition 4.4. — *On dit que $u_n(\beta)$ est un* ***développement de Puiseux partiel*** *de u_n si les deux conditions suivantes sont vérifiées pour tout $j \in \{1, ..., n\}$:*

(1) $v(\iota_\beta(Q_{n,i})) = \beta_{n,i}$, $\forall i \in \Lambda_n$ *tel que* $i < i_\beta$ *;*

(2) $v(\iota_\beta(Q_{n,i_\beta})) \geqslant \min\limits_{q\in\mathbb{N}}\{\nu(\partial_{n,p^q} Q_{n,i_\beta}) + p^q\beta\}$ *(si $i_\beta = \Lambda_n$, on considère cette condition toujours vérifiée).*

Soit T une nouvelle variable et considérons le morphisme d'anneaux $\iota_{\beta,T} : R \to \overline{W}\left[\left[p^{\Gamma'}, T\right]\right]$ défini par :

$$\begin{aligned}\iota_{\beta,T}(p) &= p^{\nu(p)};\\ \iota_{\beta,T}(u_j) &= u_j(p),\ \forall\, j \in \{1, ..., n-1\};\\ \iota_{\beta,T}(u_n) &= u_n(\beta) + T.\end{aligned}$$

On note ν_β l'extension à $\overline{W}\left[\left[p^{\Gamma'}, T\right]\right]$ de la valuation p-adique v de $\overline{W}\left[\left[p^{\Gamma'}\right]\right]$ telle que $\nu_\beta(T) = \beta$ et on suppose que $in_{\nu_\beta}(T)$ est transcendant sur $gr_v\left(\overline{W}\left[\left[p^{\Gamma'}\right]\right]\right)$. On pose alors $\mu_\beta = \nu_{\beta|R}$ où R est vu comme sous-anneau de $\overline{W}\left[\left[p^{\Gamma'}, T\right]\right]$ via le monomorphisme $\iota_{\beta,T}$.
Supposons que $i_\beta = \Lambda_n$, alors $\mu_\beta = \nu$. Sinon, supposons que $i_\beta < \Lambda_n$, c'est-à-dire qu'il existe $i \in \Lambda_n$ tel que $\varepsilon_{n,i} \geqslant \beta$. On note alors :

$$\Gamma_\beta = \Gamma^{(n-1)} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} + \sum_{i<i_\beta} \mathbb{Q}\beta_{n,i} \subset \Gamma'.$$

Lemme 4.5. — *On a les assertions suivantes :*

(1) *La valuation $\nu_{\beta|K_{n-1}}$ est l'unique valuation telle que :*

$$\nu_{\beta|K_{n-1}[\boldsymbol{Q}_{n,i_\beta}]} = \nu_{|K_{n-1}[\boldsymbol{Q}_{n,i_\beta}]};$$

$$\nu_\beta(Q_{n,i_\beta}) = \min_{q\in\mathbb{N}}\left\{\nu\left(\partial_{n,p^q} Q_{n,i_\beta}\right) + p^q\beta\right\},$$

et $in_{\nu_\beta}(Q_{n,i_\beta})$ est transcendant sur $gr_{\nu_\beta}\left(K_{n-1}[\boldsymbol{Q}_{n,i_\beta}]\right)$.

(2) *Considérons les sous-algèbres graduées $gr_{\mu_\beta}\left(K_{n-1}[\boldsymbol{Q}_{n,i_\beta}]\right) \subset gr_{\mu_\beta}(R)$ et $gr_{\nu_{n,i_\beta}}\left(K_{n-1}[\boldsymbol{Q}_{n,i_\beta}]\right) \subset gr_{\nu_{n,i_\beta}}(R)$. On a alors un isomorphisme d'algèbres graduées :*

$$gr_{\mu_\beta}\left(K_{n-1}[\boldsymbol{Q}_{n,i_\beta}]\right) \simeq gr_{\nu_{n,i_\beta}}\left(K_{n-1}[\boldsymbol{Q}_{n,i_\beta}]\right)$$

qui peut être étendu en un isomorphisme entre $gr_{\mu_\beta}(R)$ et $gr_{\nu_{n,i_\beta}}(R)$ en envoyant $in_{\mu_\beta}(Q_{n,i_\beta})$ sur $in_{\nu_{n,i_\beta}}(Q_{n,i_\beta})$, mais la graduation n'est, en général, pas préservée, sauf si l'une des deux conditions équivalentes de (3) est vérifiée.

(3) *$\mu_\beta = \nu_{n,i_\beta}$ ssi $\beta = \varepsilon_{n,i_\beta}$.*

(4) *$\forall\, h \in R$, $\nu_{n,i_\beta}(h) \leqslant \nu(h)$.*
Supposons que $\beta = \varepsilon_{n,i_\beta}$ (donc $\mu_\beta \geqslant \nu_{n,i_\beta}$). On a alors, pour tout

$h \in R$:

$$\nu_{n,i_\beta}(h) = \nu(h) \Leftrightarrow in_{\nu_{n,i_\beta}}(h) \notin \ker\left(gr_{\nu_{n,i_\beta}}(R) \to gr_\nu(R)\right)$$
$$\Leftrightarrow in_{\nu_\beta}\left(\iota_{\beta,T}(h)\right) \notin \ker\left(gr_{\nu_\beta}\left(\overline{W}\left[\left[p^{\Gamma'},T\right]\right]\right) \to gr_v\left(\overline{W}\left[\left[p^{\Gamma'}\right]\right]\right)\right).$$

En particulier, il y a égalité si $in_{\nu_\beta}(T)$ *n'apparaît pas dans* $in_{\nu_\beta}(\iota_{\beta,T}(h))$.

Preuve : (1) : $\nu_{\beta|K_{n-1}} = \nu_{|K_{n-1}}$ par définition de $\iota_{\beta,T}$, ν_β et v. Pour $i < i_\beta$, alors, $\beta_{n,i} < \beta$ et comme $u_n(\beta)$ est un développement de Puiseux partiel, on obtient l'égalité :

$$\nu_\beta\left(\iota_{\beta,T}(Q_{n,i})\right) = v\left(\iota_\beta(Q_{n,i})\right) = \beta_{n,i}.$$

Enfin, comme :

$$Q_{n,i_\beta}(u_1, ..., u_{n-1}, u_n + T) = \sum_{l=0}^{d^\circ_{u_n}(Q_{n,i_\beta})} \partial_{n,l}Q_{n,i_\beta}(u_1, ..., u_n)T^l,$$

on en déduit que :

$$\nu_\beta(Q_{n,i_\beta}) = \min_{l\in\mathbb{N}}\left\{\nu\left(\partial_{n,l}Q_{n,i_\beta}\right) + l\nu_\beta(T)\right\},$$

où le minimum est atteint avec $l = 1$ si $car(k) = 0$, une puissance de $p = car(k)$ sinon. Ainsi, $in_{\nu_\beta}(T)$ apparaît dans $in_{\nu_\beta}(Q_{n,i_\beta})$. Comme $in_{\nu_\beta}(T)$ est transcendant sur $gr_v\left(\overline{W}\left[\left[p^{\Gamma'}\right]\right]\right)$, on en déduit que $in_{\nu_\beta}(Q_{n,i_\beta})$ est transcendant sur $gr_{\nu_\beta}\left(K_{n-1}[\mathbf{Q}_{n,i_\beta}]\right)$. L'unicité de ν_β vérifiant les propriétés précédemment démontrées provient de la définition même de cette valuation.
(2) : Par définition et construction des polynômes-clés et de la valuation tronquée ν_{n,i_β}, on obtient l'égalité :

$$\nu_{n,i_\beta|K_{n-1}[\mathbf{Q}_{n,i_\beta}]} = \nu_{|K_{n-1}[\mathbf{Q}_{n,i_\beta}]}$$

qui nous définit un isomorphisme naturel d'algèbres graduées :

$$gr_{\nu_{n,i_\beta}}\left(K_{n-1}[\mathbf{Q}_{n,i_\beta}]\right) \xrightarrow{\sim} gr_{\mu_\beta}\left(K_{n-1}[\mathbf{Q}_{n,i_\beta}]\right)$$

En envoyant $in_{\nu_{n,i_\beta}}(Q_{n,i_\beta})$ sur $in_{\mu_\beta}(Q_{n,i_\beta})$, on prolonge l'isomorphisme précédent en un isomorphisme entre $gr_{\nu_{n,i_\beta}}(R)$ et $gr_{\mu_\beta}(R)$, la graduation étant préservée seulement si $\mu_\beta = \nu_{n,i_\beta}$.
(3) : Supposons que $\beta = \varepsilon_{n,i_\beta}$, par définition des polynômes-clés et de μ_β, il suffit de montrer que $\mu_\beta(Q_{n,i_\beta}) = \nu_{n,i_\beta}(Q_{n,i_\beta})$. Soit $q_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\mu_\beta(Q_{n,i_\beta}) = \nu\left(\partial_{n,p^{q_0}}Q_{n,i_\beta}\right) + p^{q_0}\beta$. Par définition de μ_β, on a :

$$\mu_\beta(Q_{n,i_\beta}) = \nu\left(\partial_{n,p^{q_0}}Q_{n,i_\beta}\right) + p^{q_0}\beta \leqslant \nu\left(\partial_{n,p^{b_{n,i_\beta}}}Q_{n,i_\beta}\right) + p^{b_{n,i_\beta}}\varepsilon_{n,i_\beta} = \beta_{n,i_\beta}.$$

Par définition de ε_{n,i_β}, on a :

$$\varepsilon_{n,i_\beta} \geqslant \frac{\beta_{n,i_\beta} - \nu\left(\partial_{n,p^{q_0}} Q_{n,i_\beta}\right)}{p^{q_0}},$$

c'est-à-dire :

$$\mu_\beta(Q_{n,i_\beta}) = \nu\left(\partial_{n,p^{q_0}} Q_{n,i_\beta}\right) + p^{q_0}\beta \geqslant \beta_{n,i_\beta}.$$

Réciproquement, si $\mu_\beta = \nu_{n,i_\beta}$, alors :

$$\beta_{n,i_\beta} = \nu\left(\partial_{n,p^{q_0}} Q_{n,i_\beta}\right) + p^{q_0}\beta \leqslant \nu\left(\partial_{n,p^{b_{n,i_\beta}}} Q_{n,i_\beta}\right) + p^{b_{n,i_\beta}}\beta,$$

ce qui donne :

$$\varepsilon_{n,i_\beta} = \frac{\beta_{n,i_\beta} - \nu\left(\partial_{n,p^{b_{n,i_\beta}}} Q_{n,i_\beta}\right)}{p^{b_{n,i_\beta}}} \leqslant \beta.$$

Enfin, rappelons que, par définition de i_β, $\beta \leqslant \varepsilon_{n,i_\beta}$.
(4) : Par la Remarque 3.9, pour tout $h \in R$, $\nu_{n,i_\beta}(h) \leqslant \nu(h)$. La première équivalence est évidente, la deuxième provient du fait que l'on a supposé $\mu_\beta = \nu_{n,i_\beta}$ et que $\mu_\beta(h) = \nu_\beta(\iota_{\beta,T}(h))$ ainsi que $v(\iota(h)) = \nu(h)$.

$\square$

Commençons notre récurrence transfinie par $\beta = \nu(u_n) = \beta_{n,1}$. On pose alors $u_n(\beta) = 0$ et on a $i_\beta = 1$, $\mu_\beta = \nu_{n,i_\beta} = \nu_{n,1}$; $u_n(\beta)$ est ainsi un développement de Puiseux partiel de u_n.
Supposons $u_n(\beta)$ construit pour un certain $\beta \in \Gamma_+$ tel que $\beta > \nu(u_n)$ et définissons le coefficient $a_{n,\beta}$ de p^β de $u_n(p)$. On suppose également, par hypothèse de récurrence, que $\beta = \varepsilon_{n,i_\beta}$ ou que $\beta \in \Gamma_\beta$.
Si $\beta \notin \Gamma_\beta$, comme $\beta = \varepsilon_{n,i_\beta}$, alors $\beta_{n,i_\beta} \notin \Gamma_\beta$ et donc $i_\beta = \max \Lambda_n$. Dans ce cas on a $\nu = \nu_{n,i_\beta} = \mu_\beta$ et on pose alors :

$$u_n(p) = u_n(\beta) + p^\beta.$$

Si $\beta \in \Gamma_\beta$ alors $\nu_\beta(Q_{n,i_\beta}) = \min_{q \in \mathbb{N}}\{\nu(\partial_{n,p^q} Q_{n,i_\beta}) + p^q\beta\} \in \Gamma_\beta$ et donc :

$$\exists\, d \in K_{n-1}, l_1, ..., l_t \in \Lambda_n, \lambda \in \mathbb{N}, \lambda_1, ..., \lambda_t \in \mathbb{Z}$$

tels que :

$$\lambda \nu_\beta(Q_{n,i_\beta}) = \sum_{j=1}^{t} \lambda_j \beta_{n,l_j} + \nu(d).$$

On pose alors :

$$z = \begin{cases} \dfrac{Q_{n,i_\beta}^{\lambda}}{d\prod\limits_{j=1}^{t} Q_{n,l_j}^{\lambda_j}} \bmod m_\nu \in k_\nu & \text{si} \quad \beta = \varepsilon_{n,i_\beta} \\ 0 & \text{si} \quad \beta < \varepsilon_{n,i_\beta} \end{cases}$$

Notons $W_{r+1}, ..., W_{n-1}, W_n$ les supports respectifs de $u_{r+1}(p), ..., u_{n-1}(p)$, $u_n(\beta)$, on note alors $u_j(p) = \sum\limits_{\gamma \in W_j} a_{j,\gamma} p^\gamma$ pour $j \in \{r+1, ..., n-1\}$ et $u_n(\beta) = \sum\limits_{\gamma \in W_n} a_{n,\gamma} p^\gamma$. Posons, pour $j \in \{r+1, ..., n\}$, $\mathfrak{a}_j = \{a_{j,\gamma} | \gamma \in W_j\} \subset \overline{W}$, $\overline{\mathfrak{a}_j} = \{\overline{a_{j,\gamma}} \mid \gamma \in W_j\} \subset \overline{k_\nu}$ son image modulo p, $\mathfrak{a} = (\mathfrak{a}_{r+1}, ..., \mathfrak{a}_n)$ et $\overline{\mathfrak{a}} = (\overline{\mathfrak{a}_{r+1}}, ..., \overline{\mathfrak{a}_n})$. Soit X une variable indépendante, si on remplace T par Xp^β dans $in_{\nu_\beta}(\iota_{\beta,T}(Q_{n,i_\beta}))$, on obtient un résultat de la forme :

$$fp^{\nu_\beta(Q_{n,i_\beta})},\ f \in K_0\left[\mathfrak{a}, X\right] .$$

On note alors $\overline{f} \in k_\nu[\overline{\mathfrak{a}}, X] \subset \overline{k_\nu}[X]$ l'image de f modulo p.
De plus, pour $j \in \{1, ..., t\}$, $in_{\nu_\beta}(\iota_\beta(Q_{n,l_j}))$ est de la forme :

$$c_j p^{\beta_{n,l_j}},\ c_j \in \overline{W}$$

et $in_{\nu_\beta}(\iota_\beta(d))$ est de la forme :

$$\delta p^{\nu(d)},\ \delta \in \overline{W}.$$

Notons $\overline{c_j}$ et $\overline{\delta}$ dans $\overline{k_\nu}$ les images respectives de c_j et de δ modulo p.
Ainsi, $\dfrac{\overline{f}^\lambda}{\overline{\delta}\prod\limits_{j=1}^{t} \overline{c_j}^{\lambda_j}} = z$ induit une équation algébrique en X sur $\overline{k_\nu}$, on note alors $\alpha_{n,\beta} \in \overline{k_\nu}$ une de ses racines et $a_{n,\beta} \in \overline{W}$ un relevé. Deux cas se présentent :

(1) $a_{n,\beta}$ est transcendant sur $K_0[\mathfrak{a}]$. On pose alors

$$u_n(p) = u_n(\beta) + a_{n,\beta} p^\beta,$$

on a $\nu = \nu_{n,i_\beta}$ et on arrête l'algorithme.

(2) $a_{n,\beta}$ est algébrique sur $K_0[\mathfrak{a}]$. On note alors

$$\tilde{\beta} = v(Q_{n,i_\beta}(u_1(p), ..., u_{n-1}(p), u_n(\beta) + a_{n,\beta} p^\beta)),$$

$$\tilde{\varepsilon} = \max_{b \in \mathbb{N}} \left\{ \frac{\tilde{\beta} - \nu(\partial_{n,p^b} Q_{n,i_\beta})}{p^b} \right\}$$

et

$$\beta_+ = \begin{cases} \min\{\tilde{\varepsilon}, \varepsilon_{n,i_\beta}\} & \text{si} \quad \beta < \varepsilon_{n,i_\beta} \\ \min\{\tilde{\varepsilon}, \varepsilon_{n,i_\beta+1}\} & \text{si} \quad \beta = \varepsilon_{n,i_\beta} \end{cases}$$

Enfin, on pose :

$$u_n(\beta_+) = u_n(\beta) + a_{n,\beta} p^{\beta},$$

ceci nous définit alors un nouveau développement de Puiseux partiel sur lequel on peut continuer la récurrence. En effet, remarquons que $\tilde{\varepsilon} \geqslant \beta$ car si $\beta < \varepsilon_{n,i_\beta}$, alors, par définition de ν_β, $\tilde{\beta} \geqslant \nu_\beta(Q_{n,i_\beta}) = \min\limits_{q \in \mathbb{N}} \left\{\nu\left(\partial_{n,p^q} Q_{n,i_\beta}\right) + p^q \beta\right\}$ et donc $\tilde{\varepsilon} \geqslant \beta$ par définition de $\tilde{\varepsilon}$; si $\beta = \varepsilon_{n,i_\beta}$, par le (3) du Lemme 4.5, $\tilde{\beta} = \beta_{n,i_\beta}$ et donc, toujours par définition $\tilde{\varepsilon} \geqslant \beta$. Ainsi, le (1) de la Définition 4.4 est toujours vérifié lorsque $\beta < \varepsilon_{n,i_\beta}$; si $\beta = \varepsilon_{n,i_\beta}$, c'est également vrai vu que, dans ce cas, $\tilde{\beta} = \beta_{n,i_\beta}$. Quant au (2), on vient de voir que $\tilde{\beta} \geqslant \nu_\beta(Q_{n,i_\beta})$ pour $\beta < \varepsilon_{n,i_\beta}$; si $\beta = \varepsilon_{n,i_\beta}$, comme la suite $(\beta_{n,i})_{i \in \Lambda_n}$ est croissante, on a, lorsque $\beta_+ = \tilde{\varepsilon}$:

$$v(\iota_{\beta_+}(Q_{n,i_\beta+1})) \geqslant \tilde{\beta} = \beta_{n,i_\beta}.$$

On en déduit que $v(\iota_{\beta_+}(Q_{n,i_\beta+1})) \geqslant \min\limits_{q \in \mathbb{N}} \left\{\nu\left(\partial_{n,p^q} Q_{n,i_\beta+1}\right) + p^q \beta_+\right\}$. Si $\beta_+ = \varepsilon_{n,i_\beta+1}$, alors :

$$v(\iota_{\beta_+}(Q_{n,i_\beta+1})) = \min_{q \in \mathbb{N}} \left\{\nu\left(\partial_{n,p^q} Q_{n,i_\beta+1}\right) + p^q \beta_+\right\}$$

par le (3) du Lemme 4.5.

Pour achever notre récurrence transfinie, il nous faut considérer le cas limite. Soient $\mathcal{W}$ un sous-ensemble bien ordonné de Γ_1 n'ayant pas d'élément maximal et $\{a_{n,\gamma} \,|\, \gamma \in \mathcal{W}\}$ tels que $\forall\, \beta \in \mathcal{W}$, $u_n(\beta) = \sum\limits_{\substack{\gamma \in \mathcal{W} \\ \gamma < \beta}} a_{n,\gamma} p^{\gamma}$ soit un développement de Puiseux partiel de u_n. Notons $u_n(\mathcal{W}) = \sum\limits_{\gamma \in \mathcal{W}} a_{n,\gamma} p^{\gamma}$. Supposons d'abord que :

$$\forall\, i \in \Lambda_n,\ \exists\, \beta \in \mathcal{W},\ \varepsilon_{n,i} < \beta.$$

Alors, pour tout $i \in \Lambda_n$, $i < i_\beta$ et donc l'ensemble $\{Q_{n,i}\}_{i \in \Lambda_n}$ forme un système complet de polynômes-clés pour l'extension $K_{n-1} \hookrightarrow K_{n-1}(u_n)$. Ainsi :

$$\forall\, f \in K_{n-1}[u_n],\ \exists\, i \in \Lambda_n,\ \nu(f) = \nu_{n,i}(f).$$

On en déduit donc, à l'aide de la définition du développement de Puiseux partiel, que :

$$\forall\, f \in K_{n-1}[u_n],\ \nu(f) = v(f(u_1(p), ..., u_{n-1}(p), u_n(\mathcal{W}))).$$

Or tout $f \in R$ tel que $\nu(f) \in \Gamma_1$ s'écrit $f = f' + f''$, avec $f' \in K_{n-1}[u_n]$ et $\nu_0(f'') > \nu(f)$.

On a alors :

$$\begin{aligned} v(f''(u_1(p),...,u_{n-1}(p),u_n(\mathcal{W}))) > \nu(f) &= \nu(f') \\ &= v(f'(u_1(p),...,u_{n-1}(p),u_n(\mathcal{W}))) \\ &= v(f(u_1(p),...,u_{n-1}(p),u_n(\mathcal{W}))). \end{aligned}$$

D'où, pour tout $f \in R$ tel que $\nu(f) \in \Gamma_1$, on a :

$$\nu(f) = v(f(u_1(p),...,u_{n-1}(p),u_n(\mathcal{W}))).$$

Enfin, le même résultat est vrai pour tout $f \in R \otimes_{R_{n-1}} K_{n-1}$ tel que $\nu(f) \in \Gamma_1$.
S'il existe un $f \in R$ tel que $\nu(f) \notin \Gamma_1$, alors l'ensemble Λ_n contient un élément maximal λ et donc il existe un $\beta \in \mathcal{W}$ tel que $\varepsilon_{n,\lambda} < \beta$. Alors f s'écrit de manière unique sous la forme $f = Q_{n,\lambda}^a \tilde{f}$, où $a \in \mathbb{N}$, $\tilde{f} \in R \otimes_{R_{n-1}} K_{n-1}$ tel que $\nu(\tilde{f}) \in \Gamma_1$. Par le cas précédent, $\nu(\tilde{f}) = v(\tilde{f}(u_1(p),...,u_{n-1}(p),u_n(\mathcal{W})))$ et donc $\nu(f) = v(f(u_1(p),...,u_{n-1}(p),u_n(\mathcal{W})))$.
On définit alors $u_n(p) = u_n(\mathcal{W})$ et la construction du développement de Puiseux s'arrête.
Supposons, pour terminer, que :

$$\exists\, i \in \Lambda_n,\ \forall\, \beta \in \mathcal{W},\ \varepsilon_{n,i} > \beta.$$

On note alors

$$i_{\mathcal{W}} = \min\{i \in \Lambda_n \mid \forall\, \beta \in \mathcal{W},\ \varepsilon_{n,i} > \beta\},$$

$$\tilde{\beta} = v(Q_{n,i_{\mathcal{W}}}(u_1(p),...,u_{n-1}(p),u_n(\mathcal{W}))),$$

$$\tilde{\varepsilon} = \max_{b \in \mathbb{N}} \left\{ \frac{\tilde{\beta} - \nu(\partial_{n,p^b} Q_{n,i_{\mathcal{W}}})}{p^b} \right\}$$

et

$$\beta_+ = \min\{\tilde{\varepsilon}, \varepsilon_{n,i_{\mathcal{W}}}\}.$$

Enfin, on pose $u_n(\beta_+) = u_n(\mathcal{W})$, ceci nous définit alors un nouveau développement de Puiseux partiel sur lequel on peut continuer la récurrence.

□

5. Des résultats de dépendance intégrale

Les résultats de cette section sont donnés dans le cas mixte, en remplaçant W par k, $\overline{W}$ par $\overline{k_\nu}$, p par t et n par $n+1$, on obtient les mêmes résultats dans le cas équicaractéristique.

Proposition 5.1. — *Soient $i \in \Lambda_n$, $\beta = \varepsilon_{n,i}$ (c'est-à-dire $i = i_\beta$), et $h \in R$. Alors :*

$$\nu_{n,i}(h) = \min_{\alpha \in \mathbb{N}} \{\nu(\partial_{n,\alpha} h) + \alpha\beta\} = \min_{\alpha \in \mathbb{N}} \{\nu_{n,i}(\partial_{n,\alpha} h) + \alpha\beta\}.$$

Preuve : Soient $h \in R$ et $\alpha \in \mathbb{N}$, par la Proposition 3.10, on a :

$$\nu_{n,i}(h) - \nu_{n,i}(\partial_{n,\alpha} h) \leqslant \alpha\beta.$$

On obtient alors :

$$\nu_{n,i}(h) \leqslant \min_{\alpha \in \mathbb{N}} \{\nu_{n,i}(\partial_{n,\alpha} h) + \alpha\beta\} \leqslant \min_{\alpha \in \mathbb{N}} \{\nu(\partial_{n,\alpha} h) + \alpha\beta\}.$$

Montrons que ces inégalités sont des égalités. Par la Remarque 4.5 (3), on a :

$$\nu_{n,i}(h) = \mu_\beta(h) = \nu_\beta(\iota_{\beta,T}(h)).$$

Soit $h = \sum_{j=0}^{s_{n,i}} d_{n,j,i} Q_{n,i}^j$ le développement (n,i)-standard de h, on pose :

$$S = \{j \in \{0, ..., s_{n,i}\} \mid j\beta + \nu(d_{n,j,i}) = \nu_{n,i}(h)\}.$$

Tout élément $j \in S$ s'écrit de la forme $j = p^e u$ où p ne divise pas u. Prenons un $j \in S$ tel que p^{e+1} divise j', pour tout $j' \in S$ tel que $j' < j$. On pose alors $\alpha = p^{b_{n,i}} j$ et à l'aide de la Proposition 3.11 on en déduit que :

$$\nu_{n,i}(h) - \nu(\partial_{n,\alpha} h) = \nu_{n,i}(h) - \nu_{n,i}(\partial_{n,\alpha} h) = \alpha\beta.$$

□

Notons $\mathcal{A}$ le sous-anneau de $\overline{W}\left[\left[p^{\Gamma'}\right]\right]$ engendré par $\iota(p), \iota(u_1), ..., \iota(u_n)$ et toutes leurs troncatures. Pour tout $j \in \{r, ..., n\}$ et $\beta \in \Gamma \cup \{\infty\}$, on note $\mathcal{A}_{j,\beta}$ le sous-anneau de $\mathcal{A}$ engendré par toutes les troncatures ouvertes de la forme $u_{j'}(\beta')$, où $(j', \beta') <_{lex} (j, \beta)$ pour l'ordre lexicographique.

Proposition 5.2. — *Soient $j \in \{r, ..., n\}$, $\beta \in \Gamma \cup \{\infty\}$, $g, h \in \mathcal{A}_{j,\beta}[u_j(\beta)]$ et $\lambda \in \Gamma_1$. On suppose que $v(gh) < \lambda$.*
Il existe alors $l \in \mathbb{N}$, $\lambda_0 < ... < \lambda_l$ et $\delta_1 > ... > \delta_l$ éléments de Γ_1 tels que :

$$(gh)(\lambda) = \sum_{i=1}^{l} g[\lambda_{i-1}, \lambda_i[\, h(\delta_i).$$

De plus, on peut choisir les suites $(\lambda_i)_{0 \leqslant i \leqslant l}$ et $(\delta_i)_{1 \leqslant i \leqslant l}$ de telle sorte que $\lambda_l \leqslant \lambda - v(h)$ et $\delta_1 \leqslant \lambda - v(g)$.

Preuve : Notons $supp(g)$ (resp. $supp(h)$) l'ensemble de tous les $\varepsilon \in \Gamma_1$ tels que le coefficient devant p^{ε} de g (resp. de h) soit non-nul. On va construire les deux suites cherchées par récurrence.
On pose $\lambda_0 = v(g)$ et $\delta_1 = \lambda - \lambda_0$, par hypothèses on a bien $\lambda_0 \leqslant \lambda - v(h)$. Supposons maintenant que, pour tout $q \geqslant 1$, on ait construit $\lambda_0 < ... < \lambda_q$ et $\delta_1 > ... > \delta_q$ avec $\lambda_q \leqslant \lambda - v(h)$ et $\delta_i = \lambda - \lambda_{i-1}$, pour $1 \leqslant i \leqslant q$. Posons alors :

$$B_q = \{\varepsilon \in supp(g) \mid \exists\, \theta \in supp(h),\ \theta + \lambda_q < \lambda \leqslant \theta + \epsilon\}.$$

Si $B_q = \emptyset$, on pose $l = q$ et la récurrence s'arrête (remarquons que ceci arrive lorsque $\lambda_q \geqslant \lambda - v(h)$). De plus, par construction, on a l'égalité :

$$(gh)(\lambda) = \sum_{i=1}^{l} g[\lambda_{i-1}, \lambda_i[\, h(\delta_i).$$

Si $B_q \neq \emptyset$, on pose $\lambda_{q+1} = \min\{\lambda - v(h),\ \min B_q\}$ et $\delta_{q+1} = \lambda - \lambda_q$. Par définition de λ_{q+1} et de δ_{q+1} et par hypothèse de récurrence on a bien que $\lambda_q < \lambda_{q+1}$ et $\delta_q > \delta_{q+1}$. De plus, on remarque que :

$$\{\lambda - \lambda_{q+1},\ \lambda - \lambda_q\} \cap supp(h) \neq \emptyset.$$

On obtient alors une suite strictement décroissante d'ensembles :

$$supp\,(h(\lambda - \lambda_1)) \underset{\neq}{\supseteq} ... \underset{\neq}{\supseteq} supp\,(h(\lambda - \lambda_{q+1}))\,,$$

où $supp\,(h(\lambda - \lambda_{q+1}))$ est un segment initial de $supp\,(h(\lambda - \lambda_q))$. Le processus s'arrête donc au bout d'un nombre fini d'itérations, ceci entraînant la finitude des suites $(\lambda_i)_i$ et $(\delta_i)_i$.

□

Corollaire 5.3. — *Soient $j \in \{r, ..., n\}$, $\beta \in \Gamma \cup \{\infty\}$, $g_1, ..., g_s \in \mathcal{A}_{j,\beta}[u_j(\beta)]$ et $\lambda \in \Gamma_1$. On suppose que $v(g_1...g_s) < \lambda$. Alors :*

$$(g_1...g_s)(\lambda) = \sum_{(i_1,...,i_s)\in N} \prod_{j=1}^{s} g_j(\lambda_{i_j}^{(j)}),$$

où $N \subset (\mathbb{N}^*)^s$ est un ensemble fini et $\lambda_{i_j}^{(j)} \in \Gamma_{1\,+}$ sont tels que $\lambda_{i_j}^{(j)} \leqslant \lambda$ avec inégalité stricte s'il existe $j' \in \{1, ..., s\}\backslash\{j\}$ tel que $v(g_{j'}) > 0$.

Preuve : Par récurence sur s en appliquant la Proposition 5.2.

□

Corollaire 5.4. — *Soient $j \in \{r, ..., n\}$, $\beta \in \Gamma \cup \{\infty\}$, $g_1, ..., g_s \in \mathcal{A}_{j,\beta}[u_j(\beta)]$ et $\lambda \in \Gamma_1$. On suppose que $v(g_1...g_s) < \lambda$. Alors :*

$$(g_1...g_s)(\lambda) \in \mathcal{A}_{j,\beta}[u_j(\beta)].$$

Preuve : Par le Corollaire 5.3, il suffit de montrer le résultat pour $s = 1$. Notons $g = g_1$ et montrons par récurrence sur $j \in \{r, ..., n\}$ que, si $g \in \mathcal{A}_{j,\beta}[u_j(\beta)]$, alors $g(\lambda) \in \mathcal{A}_{j,\beta}[u_j(\beta)]$, pour $\beta \in \Gamma \cup \{\infty\}$ et $\lambda \in \Gamma_1$ fixés.
Pour $j = r$ on a :

$$\mathcal{A}_{r,\beta}[u_r(\beta)] = \begin{cases} \overline{W}\left[p^{\nu(p)}, p^{\nu(u_1)}, ..., p^{\nu(u_r)}\right] & \text{si} \quad \nu(u_r) < \beta \\ \overline{W}\left[p^{\nu(p)}, p^{\nu(u_1)}, ..., p^{\nu(u_{r-1})}\right] & \text{si} \quad \nu(u_r) \geqslant \beta \end{cases}$$

et donc si $g \in \mathcal{A}_{r,\beta}[u_r(\beta)]$ et $v(g) < \lambda$ alors $g(\lambda) \in \mathcal{A}_{r,\beta}[u_r(\beta)]$.
Supposons $j > r$ et le résultat vrai pour $j - 1$. Soit $g \in \mathcal{A}_{j,\beta}[u_j(\beta)]$, on peut écrire g comme un polynôme en $u_j(\beta)$ à coefficients dans $\mathcal{A}_{j,\infty}$. On applique alors le Corollaire 5.3 à chaque monôme de $g(\lambda)$. Par hypothèse de récurrence, toutes les troncatures ouvertes des coefficients de g sont dans $\mathcal{A}_{j,\infty}$, ainsi $g(\lambda) \in \mathcal{A}_{j,\beta}[u_j(\beta)]$.

□

Pour $j \in \{r, ..., n\}$ et $\beta \in \Gamma \cup \{\infty\}$, considérons les morphismes d'anneaux $\tau_{j,\beta}, \iota_{j,\beta} : R_j \to \overline{W}\left[\left[p^{\Gamma'}\right]\right]$ définis par :

$$\begin{aligned} \tau_{j,\beta}(p) &= \iota_{j,\beta}(p) = \iota(p); \\ \tau_{j,\beta}(u_i) &= \iota_{j,\beta}(u_i) = \iota(u_i), \ \forall\, i \in \{1, ..., j-1\}; \\ \iota_{j,\beta}(u_j) &= u_j(\beta); \\ \tau_{j,\beta}(u_j) &= u_j[\beta]. \end{aligned}$$

Remarquons que $\iota_{n,\beta} = \iota_\beta$. Rappelons la notation $R_j = W\,[[u_1, ..., u_j]]$.

Proposition 5.5. — *Soient $j \in \{r, ..., n\}$, $\beta \in \Gamma \cup \{\infty\}$, $f \in R_j \backslash R_{j-1}$ et $\lambda \in \Gamma_1$. Alors :*

$$\iota_{j,\beta}(f)(\lambda) \in \mathcal{A}_{j,\beta}[u_j(\beta)].$$

Preuve : Remarquons tout d'abord que l'on peut remplacer f par une de ses approximations $(p, u_1, ..., u_j)$-adiques choisies dans $W\,[u_1, ..., u_j]$ de telle sorte que l'on ne modifie pas $\iota_{j,\beta}(f)(\lambda)$. Soit $f \in W\,[u_1, ..., u_j]$ choisi ainsi, on a alors :

$$\iota_{j,\beta}(f) \in W\,[\iota(p), \iota(u_1), ..., \iota(u_{j-1}), u_j(\beta)] \subset \mathcal{A}_{j,\beta}[u_j(\beta)].$$

On conclut en appliquant le Corollaire 5.4.

□

Dans ce qui suit nous allons donner une description explicite de $\tau_{j,\beta}(f)(\lambda)$

et $\iota_{j,\beta}(f)(\lambda)$ pour un λ que nous préciserons par la suite.
Soient $j \in \{r, ..., n\}$, $\beta \in \Gamma_1 \cup \{\infty\}$ et $f \in R_j \backslash R_{j-1}$. Notons

$$i_{j,\beta} = \min\{i \in \Lambda_j \mid \beta \leqslant \varepsilon_{j,i}\}$$

et par convention, si $\{i \in \Lambda_j \mid \beta \leqslant \varepsilon_{j,i}\} = \emptyset$, on prendra $i_{j,\beta} = \Lambda_j$ (c'est-à-dire le plus petit ordinal strictement plus grand que n'importe quel élément de Λ_j). Remarquons que $i_{n,\beta} = i_\beta$. On pose alors :

$$\lambda(f, \beta) = \min\{\nu_{j,i_{j,\beta}}(\partial_{j,b} f) + b\beta \mid b \in \mathbb{N}^*\};$$

$$U = \{b \in \mathbb{N}^* \mid \nu_{j,i_{j,\beta}}(\partial_{j,b} f) + b\beta = \lambda(f, \beta)\}.$$

Remarque 5.6. — Comme R_j est noethérien, on a le fait suivant :

$$\exists\, \overline{b} \in \mathbb{N}^*,\ \partial_{j,b} f \in \left(\partial_{j,0} f, ..., \partial_{j,\overline{b}} f\right),\ \forall\, b > \overline{b}.$$

Ainsi $U \subset \{0, ..., \overline{b}\}$ est un ensemble fini.

Par abus de notation, on notera $in_v(\partial_{j,b} f)$ le monôme de plus petit degré de $\iota(\partial_{j,b} f)$ dans $\overline{W}\left[\left[p^{\Gamma'}\right]\right]$. On appelle U_0 l'ensemble des $b \in U$ tels que $in_{\varepsilon_{j,i_{j,\beta}}}(T)$ n'apparaît pas dans $in_{\varepsilon_{j,i_{j,\beta}}}\left(\iota_{\varepsilon_{j,i_{j,\beta}},T}(\partial_{j,b} f)\right)$. En remplaçant n par j dans le Lemme 4.5 (4), on a, pour tout $b \in U_0$:

$$\nu_{j,i_{j,\beta}}(\partial_{j,b} f) = \nu(\partial_{j,b} f) = v\left(\iota_{\varepsilon_{j,i_{j,\beta}}}(\partial_{j,b} f)\right);$$

$$in_v(\partial_{j,b} f) = in_v\left(\iota_{\varepsilon_{j,i_{j,\beta}}}(\partial_{j,b} f)\right).$$

Remarque 5.7. — Soit $b \in U$, on a alors :

$$b \in U_0 \text{ ssi } \exists\, i_0 < i_{j,\beta},\ \nu_{j,i_0}(\partial_{j,b} f) = \nu(\partial_{j,b} f).$$

Comme U et U_0 sont des ensembles finis, le même i_0 peut être choisi tel que $\nu_{j,i_0}(\partial_{j,b} f) = \nu(\partial_{j,b} f)$ et ceci pour tout $b \in U_0$.

Pour $i_{j,\beta}$ ordinal limite, prenons $i_0 \in \Lambda_j$ satisfaisant les conditions suivantes :

(1) $i_0 < i_{j,\beta}$;

(2) $\forall\, b \in U_0$, $\nu_{j,i_0}(\partial_{j,b} f) = \nu(\partial_{j,b} f)$;

(3) $\forall\, i \in \Lambda_j$, $i_0 < i < i_{j,\beta}$, $\forall\, b \in U_0$,

$$v(\iota(\partial_{j,b} f) - in_v(\partial_{j,b} f)) - \nu(\partial_{j,b} f) > \beta - \varepsilon_{j,i}\ ;$$

(4) $\forall\, i \in \Lambda_j$, $i_0 < i < i_{j,\beta}$, $\forall\, b \in \{0, ..., \overline{b}\} \setminus U_0$,

$$\nu(\partial_{j,b} f) + b\varepsilon_{j,i} > \lambda(f, \beta).$$

Enfin, notons :

$$\Delta u_j = u_j[\beta] - u_j[\varepsilon_{j,i_0}];$$

$$\Delta u_j(\beta) = u_j(\beta) - u_j[\varepsilon_{j,i_0}].$$

PROPOSITION 5.8. — *Il existe deux polynômes $F_\beta, \tilde{F}_\beta \in \mathcal{A}_{j,\beta}\,[X]$ de la forme :*

$$F_\beta\,(X) = F_0 + \sum_{b\in U_0} in_v(\partial_{j,b}f)X^b;$$

$$\tilde{F}_\beta\,(X) = \tilde{F}_0 + \sum_{b\in U_0} in_v(\partial_{j,b}f)X^b;$$

tels que :

(1) $F_0, \tilde{F}_0 \in \mathcal{A}_{j,\beta}$ *;*

(2) $\tau_{j,\beta}(f)\,[\lambda(f,\beta)] = F_\beta\,(\Delta u_j)$ *;*

(3) $\iota_{j,\beta}(f)\,(\lambda(f,\beta)) = \tilde{F}_\beta\,(\Delta u_j(\beta))$*.*

Preuve : Dans ce qui suit, on adoptera la convention $\varepsilon_{j,\Lambda_j} = \infty$, pour tout $j \in \{r+1, ..., n\}$. Supposons d'abord que $\beta \leqslant \varepsilon_{j,1}$, alors, $u_j[\beta] = \Delta u_j = 0$ et on pose $F_0 = 0$. Dans ce cas, (2) est trivialement montré et on procède de la même manière pour montrer (3).
Supposons que $\beta > \varepsilon_{j,1}$. Soit $\varepsilon \in \Gamma_1 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, notons $\partial_{j,b}f\,(u_j[\varepsilon_{j,i_0}]) = \iota_{j,\varepsilon_{j,i_0}+\varepsilon}(\partial_{j,b}f)$ et prenons le développement de Taylor de $\iota(f)$ en $u_j[\beta]$ en la j-ème variable. On peut alors écrire :

$$\tau_{j,\beta}(f) = \sum_{b\in\mathbb{N}} \partial_{j,b}f\,(u_j[\varepsilon_{j,i_0}])\,(\Delta u_j)^b\,.$$

Par les points (3) et (4) dans le choix de i_0, les termes de la forme :

$$(\iota(\partial_{j,b}f) - in_v(\partial_{j,b}f))\,(u_j[\varepsilon_{j,i_0}])\,(\Delta u_j)^b\,,\ \text{pour } b \in U_0;$$

$$\text{et } \partial_{j,b}f\,(u_j[\varepsilon_{j,i_0}])\,(\Delta u_j)^b\,,\ \text{pour } b \notin U_0;$$

n'interviennent pas dans $\tau_{j,\beta}(f)\,[\lambda(f,\beta)]$. Ainsi, à l'aide de la Proposition 5.5, on a :

$$\tau_{j,\beta}(f)\,[\lambda(f,\beta)] - \sum_{b\in U_0} in_v(\partial_{j,b}f)\,(\Delta u_j)^b = \iota_{j,\varepsilon_{j,i_0}+\varepsilon}(f) \in \mathcal{A}_{j,\varepsilon_{j,i_0}+\varepsilon}\,[u_j\,(\varepsilon_{j,i_0}+\varepsilon)]\,.$$

On en déduit donc que $F_0 := \tau_{j,\beta}(f)\,[\lambda(f,\beta)] - \sum_{b\in U_0} in_v(\partial_{j,b}f)\,(\Delta u_j)^b \in \mathcal{A}_{j,\beta}$. De la même manière on montre, en faisant un développement de Taylor de $\iota(f)$ en $u_j(\beta)$, que $\tilde{F}_0 := \iota_{j,\beta}(f)\,(\lambda(f,\beta)) - \sum_{b\in U_0} in_v(\partial_{j,b}f)\,(\Delta u_j(\beta))^b \in$

$\mathcal{A}_{j,\beta}$. Ainsi, (1), (2), et (3) sont démontrés. Pour conclure il suffit de montrer que :

$$\forall\, b \in U_0,\ in_v(\partial_{j,b} f) \in \mathcal{A}_{j,\beta}.$$

Soit $b \in U_0$ et notons $g = \partial_{j,b} f$. On pose $i_0(b) = \min\{i_0 \in \Lambda_j \mid \nu_{j,i_0}(g) = \nu(g)\}$. Par la Proposition 3.11, on a :

$$\nu_{j,i_0(b)}(g) = \nu(g) \leqslant \nu(\partial_{j,q} g) + q\varepsilon_{j,i_0(b)},\ \forall\, q \in \mathbb{N}.$$

Par minimalité de $i_0(b)$, il existe $q > 0$ tel que l'on ait égalité dans l'inégalité précédente ; prenons alors le plus petit q de la sorte. Le choix d'un tel q entraîne que $\nu(\partial_{j,q} g) = \nu_{j,i_0(b)}(\partial_{j,q} g)$, en effet, sinon on aurait :

$$\nu_{j,i_0(b)}(g) \leqslant \nu_{j,i_0(b)}(\partial_{j,q} g) + q\varepsilon_{j,i_0(b)} < \nu(\partial_{j,q} g) + q\varepsilon_{j,i_0(b)} = \nu(g),$$

ce qui contredit le choix de q. Pour $\varepsilon \in \Gamma_1$, $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, on a :

$$\lambda\left(g, \varepsilon_{j,i_0(b)} + \varepsilon\right) = \nu(\partial_{j,q} g) + q\left(\varepsilon_{j,i_0(b)} + \varepsilon\right).$$

Fixons nous alors $\varepsilon \in \Gamma_1$, $\varepsilon > 0$ suffisamment petit tel que $in_v(\iota(g)) = \iota(g)\left(\lambda\left(g, \varepsilon_{j,i_0(b)} + \varepsilon\right)\right)$ et $\varepsilon_{j,i_0(b)} + \varepsilon < \min\{\beta, \varepsilon_{j,i_0(b)+1}\}$. Par la Proposition 5.5, on en déduit que :

$$\begin{aligned} in_v(g) &= \iota(g)\left(\lambda\left(g, \varepsilon_{j,i_0(b)} + \varepsilon\right)\right) \\ &= \iota_{j,\varepsilon_{j,i_0(b)}+\varepsilon}(g)\left(\lambda\left(g, \varepsilon_{j,i_0(b)} + \varepsilon\right)\right) \\ &\in \mathcal{A}_{j,\varepsilon_{j,i_0(b)}+\varepsilon}\left[u_j\left(\lambda\left(g, \varepsilon_{j,i_0(b)} + \varepsilon\right)\right)\right] \subset \mathcal{A}_{j,\beta}. \end{aligned}$$

□

Proposition 5.9. — *Soient $j \in \{r, ..., n\}$, $\beta \in \Gamma_1 \cup \{\infty\}$. Si $i_{j,\beta} < \Lambda_j$, alors $u_j(\beta)$ est entier sur $\mathcal{A}_{j,\beta}$ et une relation de dépendance intégrale est donnée par :*

$$\tilde{F}_0\left(\lambda\left(Q_{j,i_{j,\beta}}, \beta\right)\right) + \sum_{b \in U_0} in_v\left(\partial_{j,b} Q_{j,i_{j,\beta}}\right)\left(\Delta u_j(\beta)\right)^b = 0.$$

Preuve : Soient $j \in \{r, ..., n\}$, $\beta \in \Gamma_1 \cup \{\infty\}$ et supposons que $i_{j,\beta} < \Lambda_j$. Par la Proposition 5.8 et par construction des développements de Puiseux, on a :

$$\tilde{F}_\beta\left(\Delta u_j(\beta)\right) = \iota_{j,\beta}\left(Q_{j,i_{j,\beta}}\right)\left(\lambda\left(Q_{j,i_{j,\beta}}, \beta\right)\right) = 0.$$

De plus, $\max U_0 = d^\circ_{u_j}\left(Q_{j,i_{j,\beta}}\right)$ donc la relation précédente est bien une relation de dépendance intégrale. □

Pour $j \in \{r+1, ..., n\}$, notons $\mathcal{A}_j$ le sous-anneau de $\mathcal{A}$ engendré par $\mathcal{A}_{j-1,\infty}$ et tous les éléments de la forme $u_j(\varepsilon_{j,i})$, $i \in \Lambda_j$.

Corollaire 5.10. — *Soit $j \in \{r+1, ..., n\}$, pour tout $\beta \in \Gamma_1$ tel que $i_{j,\beta} < \Lambda_j$ on a :*

1. *$\mathcal{A}_{j,\beta}$ est une extension entière de $W[\iota(p), \iota(u_1), ..., \iota(u_{j-1})]$;*
2. *$\mathcal{A}_j$ est une extension entière de $W[\iota(p), \iota(u_1), ..., \iota(u_{j-1})]$;*
3. *$\mathcal{A}$ est une extension entière de $W[\iota(p), \iota(u_1), ..., \iota(u_n)]$.*

Preuve : La première assertion découle de la construction des développements de Puiseux, la deuxième est une appliction immédiate de la Proposition 5.9, enfin, la troisième provient des deux précédentes.

□

Corollaire 5.11. — *Pour $j \in \{r+1, ..., n\}$, $\iota(u_j)$ est transcendant sur $\mathcal{A}_j$.*

Preuve : Soit $P(X) \in \mathcal{A}_j[X] \setminus \{0\}$. Par le Corollaire 5.10 (2), on sait que $\mathcal{A}_j$ est une extension entière de $W[\iota(p), \iota(u_1), ..., \iota(u_{j-1})]$, il existe donc un $W[\iota(p), \iota(u_1), ..., \iota(u_{j-1})]$-module de type fini contenu dans $\mathcal{A}_j$ et contenant tous les coefficients de P. On peut donc écrire :

$$P(X) = \sum_{b=1}^{c} P_b(X) a_{j,b}$$

où $a_{j,b} \in \mathcal{A}_j$ et $P_b(X) \in W[\iota(p), \iota(u_1), ..., \iota(u_{j-1})][X]$, pour $b \in \{1, ..., c\}$. Comme $P \neq 0$, il existe $b_0 \in \{1, ..., c\}$ tel que $P_{b_0}(X) \neq 0$. Comme $\iota(u_j)$ est transcendant sur $W[\iota(p), \iota(u_1), ..., \iota(u_{j-1})]$, alors $P_{b_0}(\iota(u_j)) \neq 0$ et donc $P(\iota(u_j)) \neq 0$.

□

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. Abhyankar, « *Two notes on formal power series* », Proc. Amer. Math. Soc. **7** (1956), p. 903-905.

[2] C. Chevalley, *Introduction to the Theory of Algebraic Functions of One Variable*, Mathematical Surveys, No. VI, American Mathematical Society, New York, N. Y., 1951, xi+188 pages.

[3] F. J. Herrera Govantes, M. A. Olalla Acosta & M. Spivakovsky, « *Valuations in algebraic field extensions* », J. Algebra **312** (2007), no. 2, p. 1033-1074.

[4] I. Kaplansky, « *Maximal fields with valuations* », Duke Math. J. **9** (1942), p. 303-321.

[5] K. S. Kedlaya, « *Power series and p-adic algebraic closures* », J. Number Theory **89** (2001), no. 2, p. 324-339.

[6] W. Krull, « *Allgemeine Bewertungstheorie* », J. Reine Angew. Math. **167** (1932), p. 160-196.

[7] W. Mahboub, « *Key Polynomials* », Journal of Pure and Applied Algebra **217** (2013), no. 6, p. 989-1006.

[8] B. Poonen, « *Maximally complete fields* », Enseign. Math. (2) **39** (1993), no. 1-2, p. 87-106.

[9] M. Spivakovsky, « *Resolution of singularities I : local uniformization of an equicharacteristic quasi-excellent local domain whose residue field k satisfies* $[k : k^p] < \infty$. », In preparation, 2012.

[10] M. Vaquié, « *Famille admise associée à une valuation de* $K[x]$ », in Singularités Franco-Japonaises, Sémin. Congr., vol. 10, Soc. Math. France, Paris, 2005, p. 391-428.

[11] ———, « *Algèbre graduée associée à une valuation de* $K[x]$ », in Singularities in geometry and topology 2004, Adv. Stud. Pure Math., vol. 46, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2007, p. 259-271.

[12] ———, « *Extension d'une valuation* », Trans. Amer. Math. Soc. **359** (2007), no. 7, p. 3439-3481 (electronic).

[13] ———, « *Famille admissible de valuations et défaut d'une extension* », J. Algebra **311** (2007), no. 2, p. 859-876.

[14] ———, « *Extensions de valuation et polygone de Newton* », Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **58** (2008), no. 7, p. 2503-2541.

Jean-Christophe SAN SATURNINO
Université Toulouse III Paul Sabatier
Institut de Mathématiques de Toulouse
118 route de Narbonne
31062 Toulouse cedex 9 (France)
san@math.ups-tlse.fr
`http://www.math.univ-toulouse.fr/$\sim$san/`